­­­­­

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования

**«Дальневосточный федеральный университет»**

**(ДВФУ)**

|  |
| --- |
| **ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ И КОМПЬЮТЕРНЫХ ТЕХНОЛОГИЙ (ШКОЛА)**  **Департамент математического и компьютерного моделирования** |

**О Т Ч Е Т**

о прохождении производственной практики

Технологической (проектно-технологической) практики

направление подготовки 02.03.01 «Математика и компьютерные науки»

профиль «Сквозные цифровые технологии»

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | Выполнили студенты  гр. Б9122-02.03.01сцт  Поповкин А. А.\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ |
| Отчет защищен:  с оценкой «\_\_\_\_\_» |  | *(Ф.И.О.) (подпись)*  Жесткова В. О.\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_  *(Ф.И.О.) (подпись)*  Севостьянов Д. С.\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_  *(Ф.И.О.) (подпись)*  Плешанов Д. А.\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_  *(Ф.И.О.) (подпись)*  Вегера Д. Е.\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_  *(Ф.И.О.) (подпись)*  Руководитель практики  д.ф.-м.н., профессор  КовтанюкА.Е.\_**\_\_**\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_  *(Ф.И.О.) (подпись)*  «\_\_\_\_\_»\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_2024 г. |
| Рег. № \_\_\_\_\_\_  «\_\_\_\_»\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_2024 г. |  | Практика пройдена в срок  с «20» марта 2024 г.  по «26» апреля 2024 г.  (2 недели) |

г. Владивосток

2024

Оглавление

[1. Введение 3](#_Toc168343782)

[2. Цель 3](#_Toc168343783)

[3. Основная часть 4](#_Toc168343784)

[3.1. Моделирование движения крови в микрососудах 4](#_Toc168343785)

[3.2. Изменение линейной плотности эритроцитов 6](#_Toc168343786)

[3.3. Изменение радиуса эритроцита при постоянном радиусе капилляра 7](#_Toc168343787)

[3.4. Изменение количества эритроцитов 9](#_Toc168343788)

[3.5. Влияние коэффициента деформации на эффективную вязкость крови 11](#_Toc168343789)

[3.6. Изменение скорости потока крови при увеличении коэффициента деформации 12](#_Toc168343790)

[3.7. Выводы 13](#_Toc168343791)

[4. Командная работа 14](#_Toc168343792)

[5. Заключение 15](#_Toc168343793)

[6. Список литературы 15](#_Toc168343794)

# Введение

В последние десятилетия происходит быстрое развитие медицинских технологий. Стало больше препаратов, появились новые медицинские устройства и в целом произошёл прогресс в оказании медицинской помощи населению. Однако некоторые ситуации остаются до сих пор неизученными, и тут на помощь врачам приходят методы математического моделирования. Без риска для жизни человека они позволяют предсказать с высокой точностью, какое воздействие на организм оказывает даже небольшое изменение различных медицинских факторов. Поскольку ученые-медики не обладают необходимой квалификацией для построения и реализации математической модели, им необходимо сотрудничество со специалистами в области математических методов и компьютерных технологий.

Одним из самых важных процессов в человеческом организме является процесс переноса кислорода в кровеносной сети и тканях. Поэтому меня и моих сокурсников заинтересовала тема математического моделирования движения крови в сосудистой сети человека. Моделирование потока крови в сосудистой сети является важным для предсказания ситуаций, связанных с гипоксией, следствием которой может являться гибель клеток мозга, снижение когнитивных функций и физиологической активности и даже смерть человека.

Данная работа направлена на изучение движения крови в микрососудах. Будем описывать кровь как двухфазную жидкость, состоящую из плазмы и эритроцитов, при этом эритроциты моделируются как жидкость с высокой вязкостью (в 100 раз превышающую вязкость плазмы).

В процессе исследования было проделано моделирование движения крови в микрососудах, изучено влияние различных факторов на скорость потока крови и эффективную вязкость крови: радиуса эритроцита, линейной плотности эритроцитов и изменение коэффициента.

# Цель

Целью работы является моделирование движения крови в микрососуде с помощью метода конечных элементов в пакете FreeFEM++. Метод конечных элементов – это численный метод решения дифференциальных уравнений с частными производными. Данный метод эффективен для решения самых разных задач механики, математической физики и техники.

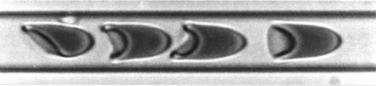
Также важной частью проекта стало изучение влияния коэффициента деформации эритроцитов на скорость потока крови. Кроме того, выявление закономерностей движения крови в отдельном микрососуде дает возможность для дальнейшего моделирования циркуляции крови в капиллярной сети мозга.

# Основная часть

## 3.1. Моделирование движения крови в микрососудах

Следуя [1], будем рассматривать движение крови в микрососудах с диаметром капилляра 4–8 мкм, длиной 50–150 мкм, положим объем эритроцита равным 88 Отметим, что при диаметре сосуда меньше 8 мкм движение крови можно представить как последовательность эритроцитов, движущихся друг за другом в потоке плазмы.

Ниже представлены рисунки человеческой крови в стеклянных трубках с диаметром 7 мкм (см. рисунки 1–2) при различных значениях гематокрита, который равен отношению объема эритроцитов к объему крови

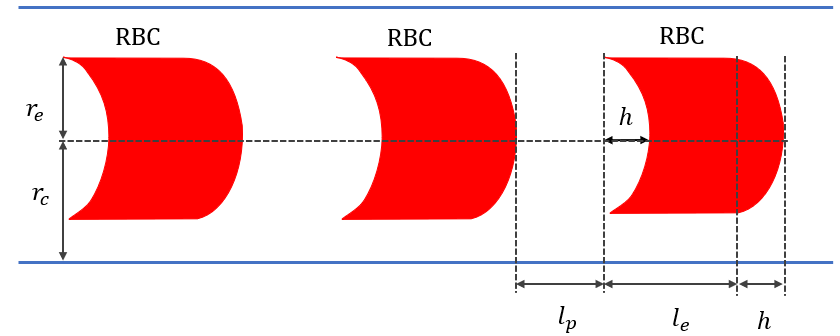


**Рис 1.** Движение крови в капилляре при гематокрите 0.2

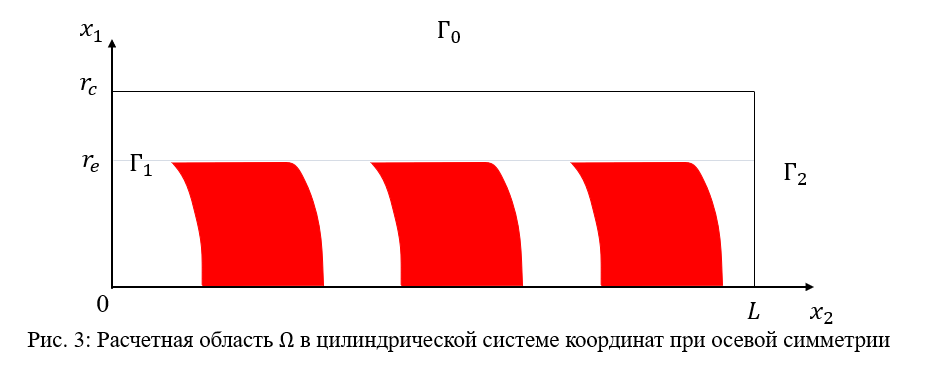


**Рис 2.** Движение крови в капилляре при гематокрите 0.4

Так как поток крови будет представлен как последовательность эритроцитов (RBC), движущихся друг за другом с потоком плазмы, движение крови в капилляре можно схематично изобразить как представлено на рисунке 3. Здесь – радиус сосуда, – радиус эритроцита, – длина сосуда. Параметр описывает деформацию эритроцитов, при деформации объем эритроцита не изменяется. Дугу отклонения описываем параболой, которая однозначно определяется радиусом RBC и параметром В качестве относительной величины, описывающей деформацию эритроцита, введем коэффициент деформации,.

**Рис. 3** Схематический рисунок эритроцитов, движущихся в капилляре.

С учетом осевой симметрии движение крови изучается в области Ω, в плоскости двух цилиндрических координат: радиальной и продольной (см. рисунок 4). Граничные условия задаются на следующих участках границы области: – стенка сосуда, – область втекания крови, – область вытекания крови.



**Рис. 4** Расчетная область в цилиндрической системе координат при осевой симметрии

Для нахождения поля скоростей будем использовать уравнение Стокса с переменной вязкостью:

(1)

| (2)

Здесь – вектор скоростей, *p* – давление, – переменная вязкость. Тензор скоростей деформации и оператор дивергенции в цилиндрических координатах с учетом осевой симметрии имеют вид:

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |

В области эритроцита значение переменной вязкости равно 0.1 Па·с, в области плазмы 0.001 Па·с.

Для реализации данной задачи методом конечных элементов выведем слабую формулировку задачи. Домножим уравнения (1) на тестовые функции из пространства Соболева *H1*, проинтегрируем по области Ω, применим формулу интегрирования по частям. В результате приходим к следующей слабой формулировке задачи:

где , – тестовые функции.

## Изменение линейной плотности эритроцитов

Проведём эксперимент, исследующий изменение скорости потока при увеличении гематокрита (линейной плотности эритроцитов)

Тем самым будет осуществлена проверка адекватности алгоритма вычисления скорости потока крови в зависимости от разного уровня гематокрита.

Будем изменять значения линейной плотности от 0.1 до 0.5, поскольку в микрососудах среднее значение линейной плотности составляет около 0.3. Значение линейной плотности высчитывается по формуле:

где – это длина эритроцита, а – это длина промежутка плазмы между двумя эритроцитами.

Возьмём коэффициент деформации равный 0 и 0.5.

**Рис 5.** Скорость потока крови при изменении линейной плотности эритроцитов

Из приведенных графиков видно, что при увеличении линейной плотности, скорость потока крови уменьшается (см. рисунок 5), что подтверждает корректность вычислительного алгоритма.

## 3.3. Изменение радиуса эритроцита при постоянном радиусе капилляра

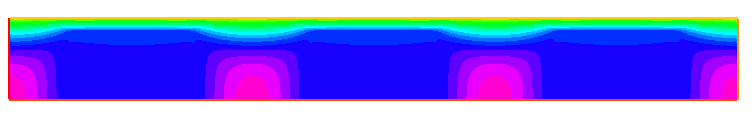
Требовалось провести эксперимент с целью исследовать, как будет меняться скорость потока крови при уменьшении/увеличении радиуса эритроцита. Тем самым будет осуществлена проверка адекватности алгоритма вычисления скорости потока крови в зависимости от радиуса эритроцитов в модельной области.

Остальные параметры были оставлены неизменными. Коэффициент деформации эритроцита был взят равным нулю.

В большинстве вычислительных экспериментов нахождение поля скоростей проводилось при фиксированном значении радиуса капилляра, радиус эритроцита находился по формуле:

где радиус эритроцита, а радиус капилляра. Таким образом, при радиусе капилляра 3 мкм, радиус эритроцита равен 2.5 мкм.

Посмотрим, как будет изменяться скорость потока при увеличении радиуса эритроцита от 2.5 мкм до 2.9 мкм. Поведение продольной компоненты скорости представлено на рисунках 6 и 7.



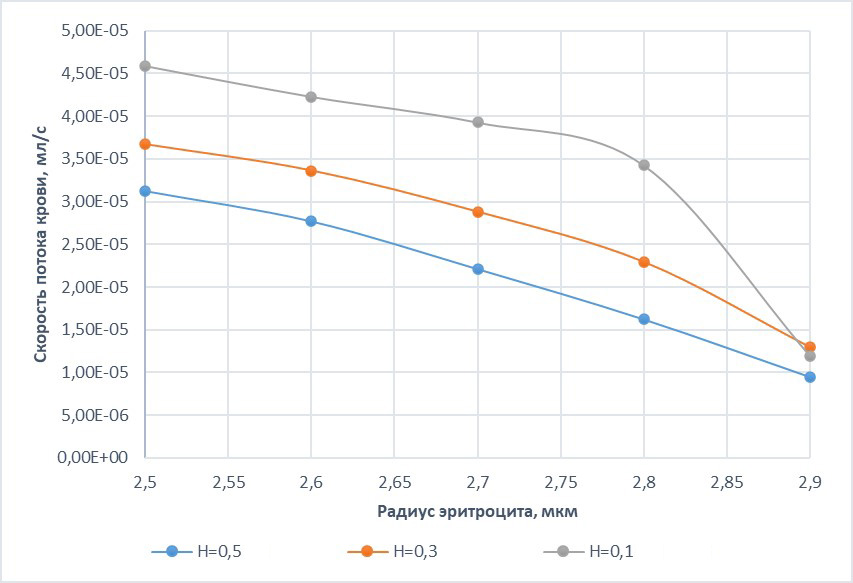
**Рис.** **6** Продольная компонента скорости при радиусе эритроцита 2.5 мкм, мм/с



**Рис.** **7** Продольная компонента скорости при радиусе эритроцита 2.9 мкм, мм/с

Рассмотрим зависимость скорости потока крови от радиуса эритроцита при трёх заданных значениях линейной плотности крови (*H*).

Зависимость скорости потока при изменении радиуса при различных значениях линейной плотности эритроцитов представлена на графике.



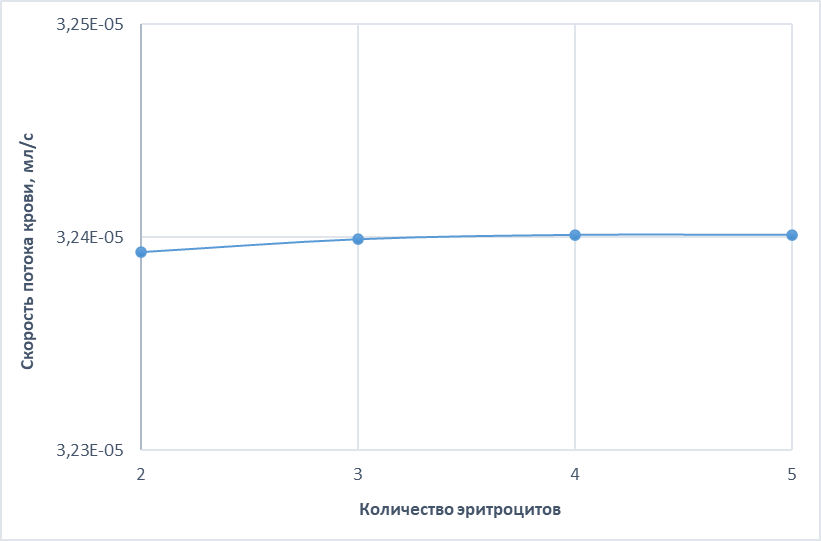
**Рис.** **8** График зависимости скорости потока при изменении радиуса эритроцита

По результатам вычислительного эксперимента видно, что при увеличении радиуса эритроцитов скорость потока постепенно уменьшается, из чего можно сделать вывод, что алгоритм адекватен и действительно отображает процесс изменения скорости потока, происходящий в настоящих микрососудах.

## 3.4. Изменение количества эритроцитов

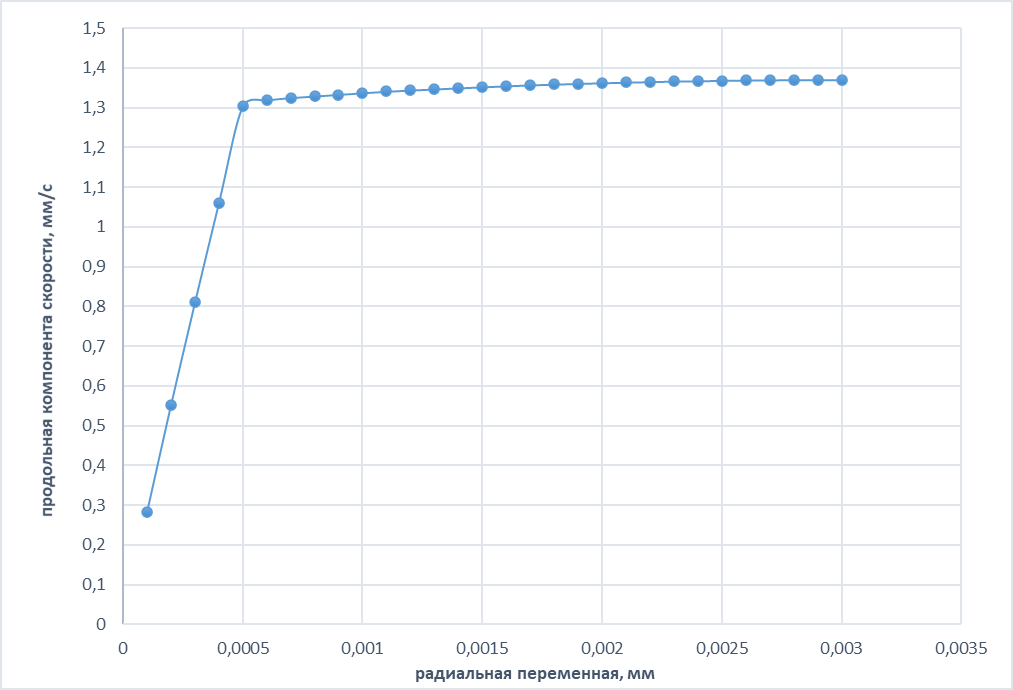
Поскольку изначально моделирование потока крови в микрососуде происходило с фиксированным количеством эритроцитов (3), необходимо провести эксперимент, как будет меняться скорость потока крови при изменении количества эритроцитов. Тем самым будет осуществлена проверка устойчивости алгоритма вычисления скорости потока крови в зависимости от количества эритроцитов в модельной области.

Возьмём линейную плотность равной 0.5. Коэффициент деформации эритроцитов оставим равным нулю.



**Рис. 9** График скорости потока при изменении количества эритроцитов

Профиль (распределение скоростей в потоке) продольной скорости, соответствующий линейной плотности эритроцитов равной , представлен на рисунке 10.



**Рис. 10** Продольная компонента скорости

По результатам вычислительного эксперимента видно, что несмотря на изменение количества эритроцитов скорость потока крови практически не изменяется, что свидетельствует об устойчивости вычислительного алгоритма.

В дальнейшем будем брать количество эритроцитов равное 3

## 3.5. Влияние коэффициента деформации на эффективную вязкость крови

По условию задачи мы работаем с уравнением Стокса с переменной вязкостью. Эффективная вязкость крови, которая напрямую влияет на скорость потока крови, вычисляется следующим образом:

где *Q* – величина потока.

Необходимо рассмотреть, как влияет коэффициент деформации на важную компоненту, напрямую влияющую на скорость потока. Также нужно рассмотреть, как изменяется вязкость при разном гематокрите (линейной плотности эритроцитов).

**Рис. 11** График относительной вязкости при увеличении коэффициента деформации

Как видим, при увеличении гематокрита, повышается эффективная вязкость, что обратно пропорционально скорости потока. Это доказывает устойчивость и корректность вычислительного алгоритма.

## 3.6. Изменение скорости потока крови при увеличении коэффициента деформации

В рамках поставленной задачи, необходимо установить, насколько сильный эффект коэффициент деформации оказывает на скорость потока.

В данном вычислительном эксперименте будем брать 3 разных значения линейной плотности эритроцитов, 0.5, 0.3 и 0.1

**Рис. 12** Скорость потока крови

Необходимо определить, насколько сильно в процентном соотношении значение потока изменяется при увеличении коэффициента деформации. Для этого воспользуемся относительной погрешностью, где в качестве точного значения будем сравнивать значения графика со значением при коэффициенте деформации равном 0.

**Рис. 13** Относительная погрешность

Из результатов вычислительных экспериментов видно, что деформация эритроцитов незначительно влияет на скорость потока и даёт ошибку, находящуюся в пределах погрешности измерений (3%). Это дает основание использовать цилиндрическую форму эритроцитов при описании модельной области.

## 3.7. Выводы

**Выводы в виде списка по каждому эксперименту (разделы 3.2–3.6)**

В результате проведённых экспериментов было установлено, что коэффициент деформации незначительно влияет на эффективную вязкость и скорость потока крови, поэтому можно пренебречь этим коэффициентом и приравнять его к 0.

Данный результат позволит применять аналитические подходы к моделированию движения крови по капиллярной сети, что значительно увеличит скорость вычислений.

В ходе работы было проведено 5 экспериментов, для исследования поведения потока крови и для проверки вычислительного алгоритма:

1. **Изменение скорости потока при увеличении гематокрита**

При увеличении линейной плотности скорость потока крови уменьшается, что подтверждает корректность вычислительного алгоритма.

1. **Изменение радиуса эритроцита при постоянном радиусе капилляра**

При увеличении радиуса эритроцитов скорость потока постепенно уменьшается, из чего можно сделать вывод, что алгоритм адекватен и действительно отображает процесс изменения скорости потока, происходящий в настоящих микрососудах.

1. **Изменение количества эритроцитов**

Несмотря на изменение количества эритроцитов скорость потока крови практически не изменяется, что свидетельствует об устойчивости вычислительного алгоритма.

1. **Влияние коэффициента деформации на эффективную вязкость крови**

При увеличении гематокрита повышается эффективная вязкость, что обратно пропорционально скорости потока. Это доказывает устойчивость и корректность вычислительного алгоритма.

1. **Изменение скорости потока крови при увеличении коэффициента деформации**

Деформация эритроцитов незначительно влияет на скорость потока и даёт ошибку, находящуюся в пределах погрешности измерений (3%). Это дает основание использовать цилиндрическую форму эритроцитов при описании модельной области.

# Командная работа

Работа была распределена следующим образом: каждому из участников была назначена часть в общей работе и каждый выполнил один из экспериментов:

1. Поповкин
   1. Проводил теоретическую подготовку. Работал над программной реализацией алгоритма в пакете FreeFem++ (изучение самого математического пакета и способов его использования).
   2. Провел эксперимент: «Изменение скорости потока крови при увеличении коэффициента деформации».
2. Жесткова
   1. Проводила теоретическую подготовку. Работала над программной реализацией алгоритма (Формат вывода данных для последующего анализа, работа с единицами измерения и стандартизацией обработки данных.)
   2. Провела эксперимент: «Исследование скорости потока при изменении радиуса эритроцита, при неизменном радиусе капилляра».
3. Вегера
   1. Оформлял документацию, проводил теоретическую подготовку.
   2. Провел эксперимент: «Влияние коэффициента деформации на эффективную вязкость крови».
4. Севостьянов
   1. Проводил теоретическую подготовку, объяснение математических и биологических понятий и терминов.
   2. Провел эксперимент: «Изучение скорости выходящего потока крови в зависимости от линейной плотности эритроцитов».
5. Плешанов
   1. Оформлял документацию, работал с графиками в Excel
   2. Провел эксперимент: «Изменение скорости потока крови при изменении количества эритроцитов в микрососуде».

# Заключение

На основе уравнений Стокса движения жидкости с переменной вязкостью разработан алгоритм нахождения поля скоростей при движении крови в микрососуде.

Осуществлена программная реализация алгоритма в пакете FreeFEM++.

Были проведены пять экспериментов, в ходе которых изменялись различные входные данные для нашего уравнения.

Проводились анализы полученных результатов, проверялась устойчивость и корректность вычислительного алгоритма. Работа в Excel позволила графически отобразить изменение главного для нас параметра (скорость потока крови) в зависимости от изменения побочных параметров (гематокрит, деформация эритроцита, радиус эритроцита и т. д.).

# Список литературы

1. Kovtanyuk A. Modeling of the cerebral blood circulation in a capillary network accounting for the influence of the endothelial surface layer / A. Kovtanyuk, V. Turova, I. Sidorenko, A. Chebotarev, R. Lampea // Computer Methods and Programs in Biomedicine. – 2022. – V. 224. – 107008.